L2 MTH1314 2014-2015

TD 4, Exercice 5, F_3

Il y avait bien une astuce. Nous avons bien travaillé les éléments que l'on pouvait deviner en TD et c'est l'essentiel à retenir. Voici pour ceux que ça intéresse la solution pour F_3. Je rappelle que théoriquement la décomposition s'écrit,

$$F_3 = \frac{X^3+1}{(X-1)\left(X^2+1\right)^3} = \frac{a}{X-1} + \frac{b_1X+c_1}{X^2+1} + \frac{b_2X+c_2}{\left(X^2+1\right)^2} + \frac{b_3X+c_3}{\left(X^2+1\right)^3}.$$

On essaye de réduire le degré de $\left(X^2+1\right)$ car c'est bien lui qui nous embête. Pour ce faire on effectue la division euclidienne du numérateur par $\left(X^2+1\right)$. On trouve,

$$X^3+1 = \left(X^2+1\right)X - X + 1.$$

Donc, et c'est un peu magique,

$$F_3 = \frac{X^3+1}{(X-1)\left(X^2+1\right)^3} = \frac{\left(X^2+1\right)X}{(X-1)\left(X^2+1\right)^3} + \frac{-X+1}{(X-1)\left(X^2+1\right)^3} = \frac{X}{(X-1)\left(X^2+1\right)^2} - \frac{1}{\left(X^2+1\right)^3}$$

Pose

$$G_3 := \frac{X}{(X-1)\left(X^2+1\right)^2},$$

que l'on décompose plus facilement,

$$G_3 = \frac{a}{X-1} + \frac{b_1X+c_1}{X^2+1} + \frac{b_2X+c_2}{\left(X^2+1\right)^2}.$$

On fait de même qu'en TD,

$$a = (X-1)\,G_3(X)\big|_{X=1} = 1/4,$$

$$b_2 i + c_2 = \left(X^2+1\right)^2 G_3(X)\Big|_{X=i} = \frac{i}{i-1} = \frac{i(-1-i)}{1+1} = \frac{1-i}{2}.$$

Puisque l'on considère la décomposition dans $\mathbb{R}(X)$, b_2 et c_2 sont réels, donc

$$b_2 = \frac{-1}{2} \qquad \text{et} \qquad c_2 = \frac{1}{2}.$$

D'autre part,

$$XG_3(X) \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} a + b_1 \qquad \text{et} \qquad XG_3(X) \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi,

$$b_1 = -a = -\frac{1}{4}.$$

On termine par une évaluation en 0,

$$G_3(0) = 0 = -a + c_1 + c_2 = -\frac{1}{4} + c_1 + \frac{1}{2}$$

D'où

$$c_1 = -\frac{1}{4}.$$

On obtient,

$$G_3 = \frac{1/4}{X-1} + \frac{(-1/4)X - 1/4}{X^2+1} + \frac{(-1/2)X + 1/2}{\left(X^2+1\right)^2}.$$

On trouve donc,

$$F_3 = \frac{1/4}{X-1} + \frac{(-1/4)X - 1/4}{X^2+1} + \frac{(-1/2)X + 1/2}{\left(X^2+1\right)^2} - \frac{1}{\left(X^2+1\right)^3},$$

qui est nécessairement la décomposition en éléments simples de F_3 par unicité de cette décomposition.
N.B. Pour ceux que l'on avait déjà calculés, on retrouve bien les mêmes coefficients.